

EXERCICE 1 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $f_n(x) = \sum_{k=1}^n x^k = x + x^2 + \dots + x^n$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 1$ admet une unique solution, notée u_n , dans $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n^{n+1} - 2u_n + 1 = 0$.
4. Montrer que, pour $n \geq 2$, on a $u_n \leq \frac{3}{4}$.
5. Montrer la convergence de la suite (u_n) et préciser sa limite.

EXERCICE 2 : Nombres complexes et géométrie

Ce sont trois questions indépendantes. Dans chacune d'elles, le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Soit $ABCD$ un quadrilatère quelconque. On construit quatre points M, N, P, Q de façon que les triangles AMB, BNC, CPD et DQA soient rectangles isocèles directs (les angles droits étant en M, N, P, Q respectivement). Exprimer les affixes m, n, p, q des points M, N, P, Q en fonction des affixes a, b, c, d des points A, B, C, D . En déduire que les segments $[MP]$ et $[NQ]$ sont perpendiculaires et de même longueur. Faire un schéma.
2. Soient A, B, C, D quatre points distincts du plan, d'affixes a, b, c, d . On suppose que

$$a + ib = c + id \quad \text{et} \quad a + c = b + d.$$

Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un carré (*penser aux propriétés des diagonales* $[AC]$ et $[BD]$). Étudier la réciproque.

3. Soient a, b, c trois nombres complexes distincts, affixes des sommets A, B, C d'un triangle. Soit z un nombre complexe. On pose

$$f(z) = \frac{z-a}{b-c}; \quad g(z) = \frac{z-b}{c-a}; \quad h(z) = \frac{z-c}{a-b}.$$

Montrer que, si deux des trois expressions ci-dessus est imaginaire pure, alors la troisième l'est aussi. Interprétation géométrique ?

PROBLÈME**PARTIE A :**

- A.1.** Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \frac{x-1}{x} - \ln|x|$.

Étudier les variations de g ; en déduire le signe de $g(x)$. Montrer en particulier qu'il existe un unique réel négatif α tel que $g(\alpha) = 0$; donner une valeur approchée de α à 0,1 près.

- A.2.** Soit h la fonction définie pour $x > 1$ par $h(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^2}$.

Montrer que $h'(x) = \frac{1}{(x-1)^3} u(x)$, où u est une fonction que l'on déterminera. Étudier les variations de u , le signe de $u(x)$, puis le signe de $h'(x)$ pour $x > 1$.

PARTIE B :

Soit f la fonction définie par $f(x) = |x|^{\frac{1}{x-1}}$.

- B.1.** Déterminer l'ensemble de définition de f et les limites de f aux bornes des intervalles de définition. Montrer que f est prolongeable par continuité au point 1. *On notera toujours f la fonction ainsi prolongée.*

B.2. On admet que $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t) - t}{t^2} = -\frac{1}{2}$.

Montrer que la fonction f est dérivable au point 1 et calculer $f'(1)$.

B.3. Étudier les variations de f et construire sa courbe représentative dans un repère orthonormal (unité : 2 cm.). On calculera $f(-1)$, $f\left(\frac{3}{2}\right)$, $f(2)$ et $f(4)$.

PARTIE C :

On se propose d'étudier la suite u définie par la condition initiale $u_0 = 4$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

C.1. Montrer qu'il existe un réel $k \in]0, 1[$ tel que

$$\forall x \in \left[\frac{3}{2}, +\infty\right[\quad |f'(x)| \leq k$$

(on pourra remarquer que $f'(x) = f(x)h(x)$ pour $x > 1$).

C.2. Résoudre, sur $\mathbb{R}_+^*$, l'équation $f(x) = x$.

C.3. Montrer que l'intervalle $\left[\frac{3}{2}, 4\right]$ est stable par f .

C.4. Des questions précédentes, déduire la convergence de la suite (u_n) .

CORRIGÉ

EXERCICE 1 :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est continue et strictement croissante (car somme de fonctions strictement croissantes) sur $\mathbb{R}_+$, donc établit une bijection de l'intervalle $\mathbb{R}_+$ vers son image $f_n(\mathbb{R}_+)$. Comme $f_n(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$, on a $f_n(\mathbb{R}_+) = [0, +\infty[= \mathbb{R}_+$.

Or, $1 \in \mathbb{R}_+$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le nombre 1 admet un unique antécédent u_n par la fonction f_n .

2. Il est clair que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$. Ainsi,

$$f_{n+1}(u_{n+1}) = 1 = f_n(u_n) \leq f_{n+1}(u_n)$$

et, la fonction f_{n+1} étant strictement croissante, on en déduit $u_{n+1} \leq u_n$: la suite (u_n) est décroissante.

3. Pour $n \geq 2$, on a $f_n(1) = n > 1$, d'où $u_n \in]0, 1[$. Par ailleurs, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ différent de 1, on a $f_n(x) = x \frac{1-x^n}{1-x}$. Le réel u_n est solution de l'équation $f_n(x) = 1$ qui peut alors s'écrire $x(1-x^n) = 1-x$, soit encore $x^{n+1} - 2x + 1 = 0$. On peut remarquer que, pour $n = 1$, on a $u_1 = 1$ et la relation $u_1^2 - 2u_1 + 1 = 0$ est encore vraie, mais ce n'est pas d'un grand intérêt...

4. Comme (u_n) est décroissante, il suffit de vérifier que $u_2 \leq \frac{3}{4}$. Or, $f_2\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{21}{16} > 1 = f_2(u_2)$, donc $\frac{3}{4} > u_2$ puisque la fonction f_2 est strictement croissante.
5. La suite (u_n) est décroissante et positive (donc minorée par 0), donc convergente. Notons l sa limite. De $0 \leq u_n \leq \frac{3}{4}$, on déduit $0 \leq u_n^{n+1} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^{n+1} = 0$. En passant à la limite dans la relation obtenue à la question 3., on obtient $-2l + 1 = 0$, donc $l = \frac{1}{2}$.

EXERCICE 2 : Nombres complexes et géométrie

1. L'hypothèse " AMB est un triangle rectangle isocèle direct de sommet principal M " signifie que le vecteur $\overrightarrow{MA}$ est l'image du vecteur $\overrightarrow{MB}$ par la rotation vectorielle d'angle $\frac{\pi}{2}$, soit $a - m = i(b - m)$, d'où

$$m = \frac{1}{1-i} (a - ib) = \frac{1+i}{2} (a - ib).$$

$$\text{De même, } n = \frac{1+i}{2} (b - ic), p = \frac{1+i}{2} (c - id) \text{ et } q = \frac{1+i}{2} (d - ia).$$

Les vecteurs $\overrightarrow{MP}$ et $\overrightarrow{NQ}$ ont alors pour affixes respectivement

$$p - m = \frac{1+i}{2} [(c - a) - i(d - b)] \quad \text{et} \quad q - n = \frac{1+i}{2} [(d - b) - i(a - c)].$$

On a ainsi $q - n = i(p - m)$, ce qui signifie que le vecteur $\overrightarrow{NQ}$ est l'image du vecteur $\overrightarrow{MP}$ par la rotation vectorielle d'angle $\frac{\pi}{2}$ (on dit aussi que $\overrightarrow{NQ}$ est le vecteur **directement orthogonal** au vecteur $\overrightarrow{MP}$), d'où $|p - m| = |n - q|$ (égalité des distances $MP = NQ$) et $\arg\left(\frac{q - n}{p - m}\right) = \frac{\pi}{2}$ (c'est-à-dire $(\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{NQ}) = \frac{\pi}{2}$: les vecteurs sont orthogonaux).

2. Par hypothèse, on a (1) : $a + ib = c + id$ et (2) : $a + c = b + d$.

La relation (2) peut s'écrire $\frac{a+c}{2} = \frac{b+d}{2}$: les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu, donc $ABCD$ est un parallélogramme (on peut aussi l'écrire $b - a = c - d$, soit $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, d'où la même conclusion). La relation (1) peut s'écrire $c - a = i(b - d)$: le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est l'image du vecteur $\overrightarrow{DB}$ par la rotation vectorielle d'angle $\frac{\pi}{2}$ ($\overrightarrow{AC}$ est le vecteur directement orthogonal à $\overrightarrow{DB}$), donc les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ ont même longueur ($ABCD$ est un rectangle) et sont perpendiculaires ($ABCD$ est un losange). Finalement, $ABCD$ est un carré.

Réciproquement, si $ABCD$ est un carré, alors ses diagonales se coupent en leur milieu ($a + c = b + d$) et elles sont perpendiculaires de même longueur (le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est l'image du vecteur $\overrightarrow{DB}$ par une rotation d'angle $\pm \frac{\pi}{2}$, soit $c - a = \pm i(b - d)$, soit encore $a + ib = c + id$ ou $a - ib = c - id$).

Les relations (1) et (2) caractérisent en fait les carrés "directs".

3. Supposons $f(z)$ et $g(z)$ imaginaires purs (un nombre complexe u est imaginaire pur si et seulement si $u + \bar{u} = 0$). On a alors

$$(\bar{b} - \bar{c})(z - a) + (b - c)(\bar{z} - \bar{a}) = 0 \quad \text{et} \quad (\bar{c} - \bar{a})(z - b) + (c - a)(\bar{z} - \bar{b}) = 0.$$

En ajoutant ces deux relations et en simplifiant, on obtient $(\bar{b} - \bar{a})(z - c) + (b - a)(\bar{z} - \bar{c}) = 0$, donc $h(z) = \frac{z - c}{a - b} \in i\mathbb{R}$.

On a ainsi montré que, si un point H d'affixe z vérifie $(AH) \perp (BC)$ et $(BH) \perp (AC)$ -or, un tel point H existe et est unique puisque la perpendiculaire à (BC) issue de A et la perpendiculaire à (AC) issue de B sont sécantes- alors on a aussi $(CH) \perp (AB)$. Cela démontre que les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes (leur point de concours H est l'**orthocentre** du triangle ABC).

PROBLÈME

PARTIE A :

- A.1. On a $g'(x) = \frac{1-x}{x^2}$, d'où les variations de g (cf. dernière page) ; les limites en $-\infty$, $+\infty$ et 0^-

sont évidentes. Pour la limite en 0^+ , écrire $g(x) = \frac{x-1-x \ln|x|}{x}$, d'où $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty$.

On a $g'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc g est continue et strictement croissante et établit une bijection de $] -\infty, 0[$ vers $\mathbb{R}$ (car les limites aux bornes de l'intervalle sont $-\infty$ et $+\infty$), donc il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $g(\alpha) = 0$.

On a alors $g(x) \leq 0$ sur $] -\infty, \alpha] \cup \mathbb{R}_+^*$ et $g(x) > 0$ sur $] \alpha, 0[$. Enfin, $\alpha \simeq -3,59$.

- A.2. C'est du calcul : on obtient $u(x) = -3 + \frac{4}{x} - \frac{1}{x^2} + 2 \ln x$. On en tire $u'(x) = \frac{2(x-1)^2}{x^3}$:

la fonction u est croissante strictement sur $]1, +\infty[$ avec $u(1) = 0$, elle est donc strictement positive sur $]1, +\infty[$ et on a aussi $h'(x) > 0$ sur $]1, +\infty[$.

PARTIE B :

- B.1. On a $f(x) = e^{F(x)}$ avec $F(x) = \frac{\ln|x|}{x-1}$, donc f (de même que F) est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

On obtient sans difficulté

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty.$$

Enfin, $\lim_{x \rightarrow 1} F(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$, donc $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = e$; la fonction f est prolongeable par continuité au point 1, avec $f(1) = e$.

- B.2. Le résultat que l'énoncé demande d'admettre résulte d'un développement limité.

Considérons le taux d'accroissement

$$\begin{aligned} T_f(1, 1+t) &= \frac{f(1+t) - f(1)}{t} = \frac{e^{\frac{\ln(1+t)}{t}} - e}{t} = e \cdot \frac{e^{\frac{\ln(1+t)}{t} - 1} - 1}{t} \\ &\sim \frac{e}{t} \left[\frac{\ln(1+t)}{t} - 1 \right] \sim e \cdot \frac{\ln(1+t) - t}{t^2} \end{aligned}$$

(les équivalences écrites sont lorsque t tend vers 0 ; on a utilisé $e^v - 1 \sim v$ lorsque v tend vers 0). On en déduit $\lim_{t \rightarrow 0} T_f(1, 1+t) = -\frac{e}{2}$, donc f est dérivable au point 1 avec $f'(1) = -\frac{e}{2}$.

B.3. On note que $f'(x) = \frac{g(x)f(x)}{(x-1)^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$.

On obtient

$$f(-1) = 1, \quad f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4}, \quad f(2) = 2, \quad f(4) = \sqrt[3]{4}.$$

PARTIE C :

C.1. Pour $x > 1$, on a $f'(x) = f(x)h(x)$. Or, f est décroissante sur $\left[\frac{3}{2}, +\infty\right[$ avec $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4}$

et $\lim_{+\infty} f = 1$, d'où $|f(x)| \leq \frac{9}{4}$ sur cet intervalle. De même, h est croissante et négative sur cet intervalle avec

$$h\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{4}{3} - 4 \ln \frac{3}{2} > -0,3$$

donc $|h(x)| \leq \frac{3}{10}$ sur cet intervalle. Sur $\left[\frac{3}{2}, +\infty\right[$, on a donc $|f'(x)| = |f(x)| \cdot |h(x)| \leq \frac{27}{40}$.

On peut donc choisir $k = \frac{27}{40} \in]0, 1[$ pour répondre à la question. La fonction f est alors

k -lipschitzienne sur l'intervalle $\left[\frac{3}{2}, +\infty\right[$ (*inégalités d'accroissements finis*).

C.2. Pour $x > 0$ et $x \neq 1$ (donc $\ln x \neq 0$), on a

$$f(x) = x \iff e^{\frac{\ln x}{x-1}} = e^{\ln x} \iff \frac{\ln x}{x-1} = \ln x \iff x-1 = 1 \iff x = 2;$$

de plus, pour $x = 1$, on a $f(x) = e \neq x$. L'unique point fixe de f dans $\mathbb{R}_+^*$ est $x_0 = 2$.

C.3. La fonction f est continue et décroissante sur l'intervalle $I = \left[\frac{3}{2}, 4\right]$, donc

$$f(I) = \left[f(4), f\left(\frac{3}{2}\right)\right] = \left[\sqrt[3]{4}, \frac{9}{4}\right] \subset I \quad \text{puisque} \quad \frac{3}{2} \leq \sqrt[3]{4} \leq \frac{9}{4} \leq 4.$$

Le segment I est donc stable par f .

C.4. L'intervalle $I = \left[\frac{3}{2}, 4\right]$ étant stable par f , on a $u_n \in I$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si la suite (u_n) converge, sa limite est nécessairement 2 car f est continue sur I et 2 est le seul point fixe de f dans l'intervalle fermé I . D'autre part, la question **C.1.** permet d'écrire, pour tout n ,

$$|u_{n+1} - 2| = |f(u_n) - f(2)| \leq k |u_n - 2|$$

et une récurrence immédiate donne $|u_n - 2| \leq k^n |u_0 - 2|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$ puisqu'une suite géométrique de raison k converge vers zéro.