EXERCICE 1 : Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On note $M = \max_{[a, b]} |f''|$.

1. Justifier l'existence de M .

Montrer qu'il existe une unique fonction affine φ telle que $\varphi(a) = f(a)$ et $\varphi(b) = f(b)$.
Expliciter $\varphi(t)$ pour $t \in [a, b]$.

2. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on note ψ_λ la fonction définie sur $[a, b]$ par

$$\psi_\lambda(t) = f(t) - \varphi(t) - \lambda(t-a)(t-b).$$

On se donne $x \in]a, b[$. Montrer que l'on peut choisir λ (et expliciter la valeur de λ en fonction de x) de façon que $\psi_\lambda(x) = 0$.

Montrer alors l'existence d'un $c \in]a, b[$ tel que $\psi_\lambda''(c) = 0$.

3. De la question 2., déduire la majoration de l'erreur commise en remplaçant l'arc de courbe par sa corde sur le segment $[a, b]$:

$$\forall x \in [a, b] \quad |f(x) - \varphi(x)| \leq \frac{M}{2}(x-a)(b-x).$$

4. En déduire $\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b \varphi(x) dx \right| \leq \frac{M}{12}(b-a)^3$.

EXERCICE 2 :

Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \operatorname{arccos}(\operatorname{th} x) \quad ; \quad g(x) = \operatorname{arcsin}\left(\frac{1}{\operatorname{ch} x}\right).$$

Sont-elles dérivables sur $\mathbb{R}$? Calculer leurs dérivées lorsqu'elles sont définies. En déduire une relation simple entre $f(x)$ et $g(x)$.

PROBLÈME :

On pose $f(x) = \frac{e^x}{1-x}$ pour tout réel x différent de 1.

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $E_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$.

1. Étudier les variations et les limites de f , construire sa courbe représentative.

2. Montrer que, pour tout entier naturel n , on peut écrire

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f^{(n)}(x) = \frac{e^x}{(1-x)^{n+1}} P_n(x),$$

où P_n est une fonction polynôme ; on exprimera $P_n(x)$ à l'aide de $P_{n-1}(x)$ et $P'_{n-1}(x)$.

3. Calculer $P_n(1)$. Quel est le terme dominant (terme de plus haut degré) du polynôme P_n ?

4. En dérivant n fois la relation $(1-x)f(x) = e^x$, démontrer la relation

$$P_n(x) = n! E_n(1-x).$$

5. On pose $F_n(x) = e^x E_n(-x)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. Prouver la relation

$$F_n(x) = 1 + \int_0^x e^t \frac{(-t)^n}{n!} dt.$$

En déduire les variations et les limites à l'infini de la fonction F_n (discuter selon la parité de n). Quel est le nombre de solutions réelles de l'équation $P_n(x) = 0$?

CORRIGÉ

EXERCICE 1 :

1. La fonction f étant de classe $\mathcal{C}^2$, sa dérivée seconde est continue sur le segment $[a, b]$, de même que la fonction $|f''|$ qui admet donc un maximum sur ce segment.

Cherchons φ sous la forme $\varphi(t) = \alpha t + \beta$. Les conditions $\varphi(a) = f(a)$ et $\varphi(b) = f(b)$

conduisent au système $\begin{cases} a \alpha + \beta = f(a) \\ b \alpha + \beta = f(b) \end{cases}$, qui admet pour solution unique le couple (α, β)

avec $\alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ (c'est le coefficient directeur de la sécante (AB) si l'on note A et B les

points d'abscisses respectives a et b sur la courbe représentative de f) et $\beta = \frac{b f(a) - a f(b)}{b - a}$.

Ainsi,

$$\varphi(t) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} t + \frac{b f(a) - a f(b)}{b - a} = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (t - a).$$

La deuxième expression de $\varphi(t)$ montre que c'est la droite de coefficient directeur $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ passant par le point $A(a, f(a))$.

2. La condition $\psi_\lambda(x) = 0$ donne $\lambda = \frac{\varphi(x) - f(x)}{(x - a)(b - x)}$. Si λ est ainsi choisi, la fonction ψ_λ est de

classe $\mathcal{C}^2$ sur le segment $[a, b]$ (c'est la différence de f et d'une fonction polynôme du second degré) et vérifie $\psi_\lambda(a) = \psi_\lambda(x) = \psi_\lambda(b) = 0$. En appliquant le théorème de Rolle, il existe au moins un point d dans l'intervalle $]a, x[$ tel que $\psi'_\lambda(d) = 0$ et un point e dans $]x, b[$ tel que $\psi'_\lambda(e) = 0$. Comme $d < e$, on peut de nouveau appliquer le théorème de Rolle à la fonction dérivée ψ'_λ : il existe $c \in]d, e[$ tel que $\psi''_\lambda(c) = 0$.

3. Soit $x \in]a, b[$ fixé. Choisissons alors λ comme dans la question précédente. Explicitons la dérivée seconde de ψ_λ :

$$\forall t \in [a, b] \quad \psi''_\lambda(t) = f''(t) - 2\lambda = f''(t) - 2 \frac{\varphi(x) - f(x)}{(x - a)(b - x)}.$$

La condition $\psi''_\lambda(c) = 0$ s'écrit alors $\varphi(x) - f(x) = \frac{f''(c)}{2}(x - a)(b - x)$. On a donc la majoration

$$\forall x \in]a, b[\quad |f(x) - \varphi(x)| \leq \frac{M}{2}(x - a)(b - x),$$

majoration qui reste évidemment valable pour $x = a$ et $x = b$.

4. On a

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b \varphi(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x) - \varphi(x)| dx \leq \frac{M}{2} \int_a^b (x-a)(b-x) dx .$$

Un petit calcul, que je laisse volontiers au lecteur, donne $\int_a^b (x-a)(b-x) dx = \frac{(b-a)^3}{6}$, d'où la conclusion.

Les résultats obtenus dans cet exercice seront prochainement repris en cours pour majorer l'erreur commise lors d'un calcul approché d'intégrale par la méthode des trapèzes.

EXERCICE 2 :

- La fonction th , définie sur $\mathbb{R}$, prend ses valeurs dans $] -1, 1[$, intervalle sur lequel la fonction arccos est définie et dérivable. La fonction composée $f = \text{arccos} \circ \text{th}$ est donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ avec

$$f'(x) = (\text{th})'(x) \cdot (\text{arccos})'(\text{th } x) = (1 - \text{th}^2 x) \cdot \frac{-1}{\sqrt{1 - \text{th}^2 x}} = -\sqrt{1 - \text{th}^2 x} = -\frac{1}{\text{ch } x}$$

car, pour tout réel x , on a $1 - \text{th}^2 x = \frac{1}{\text{ch}^2 x}$ et $\text{ch } x > 0$.

- La fonction $\frac{1}{\text{ch}}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $]0, 1]$; la fonction arcsin est définie et continue sur cet intervalle, mais n'est pas dérivable au point 1. La fonction g est donc continue sur $\mathbb{R}$, mais on ne peut utiliser la formule de dérivation d'une fonction composée qu'en un point x pour lequel $\frac{1}{\text{ch } x} \neq 1$, c'est-à-dire pour $x \neq 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$g'(x) = -\frac{\text{sh } x}{\text{ch}^2 x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\text{ch}^2 x}}} = -\frac{\text{sh } x}{\text{ch}^2 x} \cdot \frac{\text{ch } x}{\sqrt{\text{ch}^2 x - 1}} = -\frac{\text{sh } x}{|\text{sh } x|} \cdot \frac{1}{\text{ch } x} = -\frac{\text{sgn}(x)}{\text{ch } x}$$

car $\text{ch}^2 x - 1 = \text{sh}^2 x$ et, pour tout réel x , $\text{sh } x$ est du signe de x .

- *Remarque.* On voit que $\lim_{x \rightarrow 0^-} g'(x) = -1$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} g'(x) = 1$, donc la fonction g n'est effectivement pas dérivable en zéro, mais admet en ce point une dérivée à gauche et une dérivée à droite distinctes : $g'_g(0) = -1$ et $g'_d(0) = 1$. Notons toutefois que les deux fonctions f et g sont continues sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions f et g sont dérivables et ont la même dérivée sur $\mathbb{R}_+^*$, donc diffèrent d'une constante ; comme elles ont la même limite en $+\infty$, à savoir $\text{arccos}(1) = \text{arcsin}(0) = 0$, on en déduit qu'elles coïncident sur cet intervalle ;
- Les fonctions f et g sont dérivables et ont des dérivées opposées sur $\mathbb{R}_-^*$, donc leur somme $f + g$ est constante sur cet intervalle et vaut

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \text{arccos}(-1) + \text{arcsin}(0) = \pi .$$

Bilan : on a $\begin{cases} g(x) = \pi - f(x) & \text{sur } \mathbb{R}_- \\ g(x) = f(x) & \text{sur } \mathbb{R}_+ \end{cases}$ (les deux expressions coïncidant pour $x = 0$).

PROBLÈME :

1. $f'(x) = \frac{(2-x)e^x}{(x-1)^2}$ est du signe de $2-x$. La fonction f est donc strictement croissante sur chacun des intervalles $]-\infty, 1[$ et $]1, 2]$, et strictement décroissante sur $[2, +\infty[$. Les limites se laissent calculer tranquillement, sans opposer de résistance :

$$\lim_{-\infty} f = 0 \quad ; \quad \lim_{1^-} f = +\infty \quad ; \quad \lim_{1^+} f = -\infty \quad ; \quad \lim_{+\infty} f = -\infty .$$

L'axe Ox est donc asymptote à la courbe lorsque x tend vers $-\infty$.

2. Il s'agit d'une assertion $(\mathcal{A}_n)$ dépendant d'un entier naturel n , montrons-la par récurrence :
- c'est vrai pour $n = 0$ avec $P_0(x) = 1$;
 - c'est vrai aussi pour $n = 1$ avec $P_1(x) = -x + 2$;
 - soit $n \in \mathbb{N}$, si l'assertion est vraie au rang n alors, en dérivant l'expression de $f^{(n)}(x)$, on obtient, après réduction (sur feu doux) :

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{e^x}{(1-x)^{n+2}} [(n+2-x)P_n(x) + (1-x)P'_n(x)] .$$

L'expression entre crochets étant une fonction polynôme de x , l'assertion est prouvée par récurrence.

En décalant les indices dans la relation ci-dessus, on obtient la relation permettant le calcul de proche en proche des polynômes P_n :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad P_n(x) = (n+1-x)P_{n-1}(x) + (1-x)P'_{n-1}(x) \quad (*) .$$

3. En appliquant la relation ci-dessus pour $x = 1$, on obtient $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad P_n(1) = n P_{n-1}(1)$. Comme $P_0(1) = 1$, on en déduit $P_n(1) = n!$ (sans aspirine).

Il peut sembler raisonnable de conjecturer que le terme dominant du polynôme P_n est $(-1)^n x^n$: c'est vrai pour $n = 0$ et pour $n = 1$. Si, pour un $n \in \mathbb{N}^*$ donné, c'est vrai au rang $n-1$ (c'est-à-dire P_{n-1} a pour terme dominant $(-1)^{n-1} x^{n-1}$), alors, dans la relation (*) ci-dessus, le terme $(n+1-x)P_{n-1}(x)$ a pour terme dominant $-x \cdot (-1)^{n-1} x^{n-1} = (-1)^n x^n$; quant au terme $(1-x)P'_{n-1}(x)$, étant de degré seulement $n-1$, il ne fait pas le poids et se laisse donc gentiment négliger, ce qui achève la récurrence.

4. En utilisant la formule de Leibniz, dérivons n fois la relation $e^x = (1-x)f(x)$. Cela donne

$$e^x = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot \frac{d^k}{dx^k} (1-x) \cdot f^{(n-k)}(x) = (1-x)f^{(n)}(x) - n f^{(n-1)}(x) .$$

La somme ne comporte en fait que deux termes car $\frac{d^k}{dx^k} (1-x)$ est nul pour $k \geq 2$. On peut réécrire cela sous la forme

$$e^x = \frac{e^x}{(1-x)^n} P_n(x) - n \frac{e^x}{(1-x)^n} P_{n-1}(x) ,$$

soit encore $P_n(x) = n P_{n-1}(x) + (1-x)^n$. On a donc aussi $P_{n-1}(x) = (n-1) P_{n-2}(x) + (1-x)^{n-1}$ puis, en réinjectant

$$P_n(x) = n(n-1) P_{n-2}(x) + n(1-x)^{n-1} + (1-x)^n .$$

On écrit encore une étape ou deux au brouillon et on est alors mûr pour conjecturer que, pour k de 1 à n ,

$$\begin{aligned} P_n(x) &= n(n-1)\cdots(n-k+1)P_{n-k}(x) + n(n-1)\cdots(n-k+2)(1-x)^{n-k+1} + \cdots + (1-x)^n \\ &= n(n-1)\cdots(n-k+1)P_{n-k}(x) + \sum_{j=n-k+1}^n \frac{n!}{j!} (1-x)^j, \end{aligned}$$

ce que l'on peut vérifier par récurrence. Pour $k = n$, tenant compte de $P_0(x) = 1 = (1-x)^0$, on a donc

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^n \frac{n!}{j!} (1-x)^j = n! \sum_{k=0}^n \frac{(1-x)^k}{k!} = n! E_n(1-x).$$

5. Démontrons la relation proposée par récurrence sur n :

- pour $n = 0$, $1 + \int_0^x e^t dt = 1 + (e^x - 1) = e^x = e^x E_0(-x) = F_0(x)$: c'est vrai.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ donné, supposons la relation vraie au rang n . On effectue une intégration par parties :

$$\begin{aligned} 1 + \int_0^x e^t \frac{(-t)^{n+1}}{(n+1)!} dt &= 1 + \left[(-t)^{n+1} \frac{e^t}{(n+1)!} \right]_0^x + \frac{1}{n!} \int_0^x e^t (-t)^n dt \\ &= 1 + \int_0^x e^t \frac{(-t)^n}{n!} dt + e^x \frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)!} \\ &= F_n(x) + e^x \frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)!} \quad (\text{hypothèse de récurrence}) \\ &= e^x \left[E_n(-x) + \frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)!} \right] = e^x E_{n+1}(-x) = F_{n+1}(x). \end{aligned}$$

La fonction F_n est donc une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto e^x \frac{(-x)^n}{n!}$, soit

$$F_n'(x) = e^x \frac{(-x)^n}{n!}. \text{ Remarquons enfin la relation } P_n(x) = n! e^{-x} F(x-1) \text{ ou encore}$$

$$F_n(x) = \frac{e^x}{n!} P_n(x+1). \text{ La fonction } x \mapsto e^{-x} \text{ ne s'annulant pas, le nombre de zéros réels de la fonction polynôme } P_n \text{ est égal au nombre de solutions réelles de l'équation } F_n(x) = 0.$$

Notons aussi que, le terme dominant du polynôme P_n (ou du polynôme "translaté" $P_n(x+1)$, c'est le même) étant $(-1)^n x^n$, on a $P_n(x+1) \underset{x \rightarrow \pm\infty}{\sim} (-1)^n x^n$, par conséquent

$$F_n(x) \underset{x \rightarrow \pm\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{n!} x^n e^x.$$

On en déduit la discussion suivante :

- si n est pair, alors $\forall x \in \mathbb{R} \quad F_n'(x) \geq 0$ (cette dérivée étant nulle seulement pour $x = 0$) : la fonction F_n est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Des équivalents écrits ci-dessus, on déduit $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_n(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_n(x) = +\infty$: la fonction F_n réalise alors une bijection continue strictement croissante de $\mathbb{R}$ vers $]0, +\infty[= \mathbb{R}_+^*$ et ne s'annule donc pas ; le polynôme P_n n'a pas de racine réelle.

- si n est impair, la dérivée $F'_n(x)$ est du signe de $-x$, la fonction F_n est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}_-$, strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$, avec $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_n(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_n(x) = -\infty$. En faisant un tableau de variations, on voit que la fonction F_n s'annule en un point et un seul (appartenant à $\mathbb{R}_+$), donc le polynôme P_n a une unique racine réelle.