

PROBLÈME 1 : Soit C la courbe définie paramétriquement par

$$x = \frac{1}{t(t^2 - 1)} \quad ; \quad y = \frac{t(t - 2)}{t^2 - 1}.$$

1. Dresser les tableaux de variations des fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$.
2. Montrer que la courbe C possède un point double. Déterminer ses coordonnées.
3. Donner les équations des asymptotes à la courbe C , et préciser la position des branches infinies de C par rapport aux asymptotes.
Déterminer les points en lesquels la courbe C recoupe ses asymptotes.
4. Préciser l'allure de la courbe C lorsque le paramètre t tend vers l'infini. Peut-on parler de "tangente" à la courbe lorsque t tend vers ∞ ?
5. Construire soigneusement la courbe C et ses asymptotes sur un même schéma.
- 6.a. Soit une droite $\mathcal{D}$ du plan, d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$. Montrer qu'un point de C , de paramètre t , appartient à $\mathcal{D}$ si et seulement si t est solution d'une équation du troisième degré que l'on écrira.
b. Soient M_1, M_2, M_3 trois points de C , de paramètres respectifs t_1, t_2, t_3 . Du a., déduire une condition nécessaire et suffisante sur t_1, t_2, t_3 pour que les points M_1, M_2, M_3 soient alignés.

PROBLÈME 2 : Soient a_1 , et a_2 deux réels distincts. On pose

$$E = \left\{ \frac{P}{(X - a_1)^2 (X - a_2)^2} ; P \in \mathbb{R}_3[X] \right\}.$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}(X)$. Quelle est sa dimension ? En préciser une base (*on pourra même exhiber deux bases de E , une "naturelle", l'autre faisant appel à la décomposition en éléments simples*).
2. Soit F l'ensemble des éléments de E "admettant des primitives rationnelles" (c'est-à-dire des éléments de E qui sont des dérivées de fractions rationnelles). Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E . En préciser la dimension et une base.
3. Trouver un sous-espace vectoriel G de E tel que $E = F \oplus G$.
4. Dans cette question, on prend $a_1 = 1, a_2 = 2$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur les coefficients de $P \in \mathbb{R}_3[X]$ pour que la fraction rationnelle $\frac{P}{(X - 1)^2 (X - 2)^2}$ appartienne à F .

PROBLÈME 3 : Polynômes d'interpolation de Lagrange

Soient $a_0, a_1, \dots, a_n$ ($n + 1$) réels distincts.

1. Soit un entier $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Montrer qu'il existe un unique polynôme L_i de degré au plus égal à n tel que

$$\begin{cases} L_i(a_i) = 1 \\ L_i(a_j) = 0 \text{ pour tout } j \neq i \end{cases}$$

(on obtiendra une expression factorisée de ce polynôme L_i en écrivant qu'il admet pour racines tous les $a_j, j \neq i$).

2. Montrer que la famille $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Soient d'autre part $b_0, b_1, \dots, b_n$ des nombres réels (non nécessairement distincts). Montrer qu'il existe un unique polynôme L appartenant à $\mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad L(a_i) = b_i$$

et préciser les coordonnées du polynôme L dans la base $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

4. *Application.* On prend ici $n = 3, a_0 = -1, a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 2$. Expliciter les polynômes L_0, L_1, L_2 et L_3 (sous forme développée). Exprimer les polynômes $1, X, X^2, X^3$ comme combinaisons linéaires de L_0, L_1, L_2, L_3 .

5. Dans cette question, on pose $a_k = \frac{k}{n}$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On considère d'autre part une fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ et on note L_n l'unique polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $L_n(a_k) = f(a_k)$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On pose $M_{n+1} = \sup_{t \in [0, 1]} |f^{(n+1)}(t)|$. On définit enfin le polynôme

$$P_n = \prod_{k=0}^n (X - a_k) = X \left(X - \frac{1}{n}\right) \left(X - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(X - \frac{n-1}{n}\right) (X - 1).$$

- a. Montrer que $\forall x \in [0, 1] \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |P_n(x)| \leq 1$.
- b. Soit $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ admettant $n+2$ zéros dans l'intervalle $[0, 1]$. Montrer qu'il existe un point c dans l'intervalle $]0, 1[$ tel que $\varphi^{(n+1)}(c) = 0$.
- c. Soit $x \in [0, 1]$ fixé, on suppose que $x \notin \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1\right\}$. Soit la fonction φ définie par

$$\forall t \in [0, 1] \quad \varphi(t) = f(t) - L_n(t) - C P_n(t),$$

la constante C étant choisie de façon que $\varphi(x) = 0$. En appliquant la question b., montrer la majoration

$$|f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}.$$

CORRIGÉ

PROBLÈME 1 :

1. On a $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$, $x'(t) = \frac{1-3t^2}{t^2(t^2-1)^2}$ et $y'(t) = 2 \frac{t^2-t+1}{(t^2-1)^2}$, d'où les tableaux de variations, cf. dernière page.

2. La recherche d'un point double conduit au système (S) :
$$\begin{cases} t_1 \neq t_2 \\ \frac{1}{t_1(t_1^2-1)} = \frac{1}{t_2(t_2^2-1)} \\ \frac{t_1(t_1-2)}{t_1^2-1} = \frac{t_2(t_2-2)}{t_2^2-1} \end{cases}$$

Après réduction au même dénominateur, factorisation puis simplification par $t_1 - t_2$ (puisqu'on exclut le cas $t_1 = t_2$), on obtient

$$(S) \iff \begin{cases} t_1 \neq t_2 \\ t_1^2 + t_1 t_2 + t_2^2 - 1 = 0 \\ 2 t_1 t_2 - (t_1 + t_2) + 2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} t_1 \neq t_2 \\ S^2 - P = 1 \\ S - 2P = 2 \end{cases},$$

en posant $S = t_1 + t_2$ et $P = t_1 t_2$. Finalement, on obtient $\begin{cases} S = 0 \\ P = -1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} S = \frac{1}{2} \\ P = -\frac{3}{4} \end{cases}$.

Le premier cas donne t_1 et t_2 comme solutions de $t^2 - 1 = 0$ ce qui est à exclure puisque les réels 1 et -1 n'appartiennent pas à l'ensemble de définition de l'arc paramétré. Le

deuxième cas donne t_1 et t_2 comme solutions de **(E)** : $t^2 - \frac{1}{2}t - \frac{3}{4} = 0$, soit $t_1 = \frac{1 - \sqrt{13}}{4}$

et $t_2 = \frac{1 + \sqrt{13}}{4}$ (ou l'inverse, bien entendu).

En utilisant le fait que le paramètre t est racine de **(E)**, on trouve les coordonnées du point double : $x = \frac{8}{3}$ et $y = -3$.

3. L'arc C admet des branches infinies lorsque le paramètre t tend vers les valeurs -1 , 0 ou 1 .

- Lorsque $t \rightarrow 0$, on a $x \rightarrow \infty$ et $y \rightarrow 0$: la droite d'équation $y = 0$ (l'axe Ox) est asymptote et la position de C par rapport à Ox se lit sur le tableau de variations...

- Lorsque $t \rightarrow 1$, on a $\frac{y}{x} = t^2(t-2) \rightarrow -1$ et $y+x = \frac{t^2-t-1}{t(t+1)} \rightarrow -\frac{1}{2}$. La droite D_1 d'équation cartésienne $y = -x - \frac{1}{2}$ est donc asymptote à la courbe C . On note que

$$y(t) - \left(-x(t) - \frac{1}{2}\right) = \frac{3t^2 - t - 2}{2t(t+1)} = (t-1)\varphi(t),$$

où $\varphi(t) = \frac{3t+2}{2t(t+1)}$ est strictement positif pour t voisin de 1. On peut donc dire que la courbe C est en-dessous de D_1 lorsque $t \rightarrow 1^-$, et au-dessus de D_1 lorsque $t \rightarrow 1^+$.

- Lorsque $t \rightarrow -1$, on a $\frac{y}{x} = t^2(t-2) \rightarrow -3$ et $y+3x = \frac{t^2-3t+3}{t(t-1)} \rightarrow \frac{7}{2}$. La droite D_2 d'équation cartésienne $y = -3x + \frac{7}{2}$ est donc asymptote à la courbe C . Enfin,

$$y(t) - \left(-3x(t) + \frac{7}{2}\right) = \frac{-5t^2 + t + 6}{2t(t-1)} = (t+1)\psi(t),$$

où $\psi(t) = \frac{6-5t}{2t(t-1)}$ est strictement positif pour t voisin de -1 . La courbe C est donc en-dessous de D_2 lorsque $t \rightarrow (-1)^-$, et au-dessus de D_2 lorsque $t \rightarrow (-1)^+$.

4. Lorsque $t \rightarrow \pm\infty$, les fonctions coordonnées x et y ont des limites finies ($x \rightarrow 0$ et $y \rightarrow 1$) : **il n'y a donc pas de branche infinie**, mais la courbe admet un "point-limite" $A(0, 1)$.

On peut étendre la notion de tangente à ce type de situation en cherchant si le coefficient directeur $m(t)$ de la droite $(AM(t))$ admet une limite lorsque $t \rightarrow \infty$. On a

$m(t) = \frac{y(t)-1}{x(t)} = t(1-2t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} -\infty$. Le coefficient directeur de la "sécante" (AM) a

une limite infinie, on peut donc dire que la courbe (prolongée par le point-limite A) présente une tangente verticale (axe Oy) en ce point. Par ailleurs, l'observation du tableau de variations montre que la courbe C est "à gauche" de l'axe Oy lorsque $t \rightarrow -\infty$ et "à droite" lorsque $t \rightarrow +\infty$, il y a donc une inflexion au point A .

- 6.a.** Le point $M(t)$ de paramètre t sur la courbe C appartient à $\mathcal{D}$ si et seulement si $ax(t) + by(t) + c = 0$ ce qui, après réduction au même dénominateur, donne l'équation du troisième degré (au plus) :

$$(\mathbf{E}) \quad : \quad (b+c)t^3 - 2bt^2 - ct + a = 0.$$

On en déduit déjà que quatre points de C ne peuvent être alignés.

- b.** Les points M_1, M_2, M_3 sont alignés si et seulement si le triplet (t_1, t_2, t_3) est une liste

$$\text{des racines d'une équation de la forme } (\mathbf{E}), \text{ ce qui impose les conditions } \begin{cases} \sigma_1 = \frac{2b}{b+c} \\ \sigma_2 = -\frac{c}{b+c}, \\ \sigma_3 = -\frac{a}{b+c} \end{cases},$$

où $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sont les fonctions symétriques élémentaires des nombres t_1, t_2 et t_3 (*Rappel* : $\sigma_1 = t_1 + t_2 + t_3$, $\sigma_2 = t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1$, $\sigma_3 = t_1t_2t_3$). On a alors la relation $\sigma_1 - 2\sigma_2 = 2$, soit

$$(\mathbf{R}) \quad : \quad t_1 + t_2 + t_3 - 2(t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1) - 2 = 0.$$

Inversement, si la relation $(\mathbf{R})$ est vérifiée alors, en posant $a = -\sigma_3$, $b = 1 + \sigma_2$, $c = -\sigma_2$, les points M_1, M_2, M_3 sont alignés sur la droite $\mathcal{D}$ d'équation $ax + by + c = 0$.

PROBLÈME 2 :

- 1.** Soit le polynôme $D = (X - a_1)^2 (X - a_2)^2$. Alors E est l'ensemble des fractions rationnelles R admettant une écriture (évidemment unique) de la forme $R = \frac{aX^3 + bX^2 + cX + d}{D}$ avec a, b, c, d réels, donc E est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}(X)$ engendré par la famille de fractions rationnelles $\left(\frac{X^3}{D}, \frac{X^2}{D}, \frac{X}{D}, \frac{1}{D}\right)$. Cette famille est libre d'après l'unicité de l'écriture, donc c'est une base de E et $\dim E = 4$.

Par ailleurs, le théorème de décomposition en éléments simples montre aussi que E est exactement l'ensemble des fractions rationnelles que l'on peut écrire (toujours de façon unique) sous la forme

$$R = \frac{\alpha}{X - a_1} + \frac{\beta}{(X - a_1)^2} + \frac{\gamma}{X - a_2} + \frac{\delta}{(X - a_2)^2} \quad (*)$$

avec $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ réels, donc une autre base de E est la famille

$$\mathcal{B} = \left(\frac{1}{X - a_1}, \frac{1}{(X - a_1)^2}, \frac{1}{X - a_2}, \frac{1}{(X - a_2)^2} \right).$$

- 2.** En utilisant la décomposition dans la base $\mathcal{B}$, la fraction rationnelle R définie par la relation $(*)$ "admet des primitives rationnelles" si et seulement si les coefficients α et γ sont nuls. Donc F est le sous-espace vectoriel de E engendré par les fractions $\frac{1}{(X - a_1)^2}$ et $\frac{1}{(X - a_2)^2}$: $F = \text{Vect} \left(\frac{1}{(X - a_1)^2}, \frac{1}{(X - a_2)^2} \right)$, ces deux fractions forment une base de F et $\dim F = 2$.

3. Le sous-espace $G = \text{Vect} \left(\frac{1}{X-a_1}, \frac{1}{X-a_2} \right)$ est un supplémentaire de F dans E .

Plus généralement, si $\mathcal{B} = (x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$ est une base d'un espace vectoriel E , alors les sous-espaces $F = \text{Vect}(x_1, \dots, x_k)$ et $G = \text{Vect}(x_{k+1}, \dots, x_n)$ sont supplémentaires dans E .

4. Soit la fraction $R = \frac{aX^3 + bX^2 + cX + d}{(X-1)^2(X-2)^2} = \frac{\alpha}{X-1} + \frac{\beta}{(X-1)^2} + \frac{\gamma}{X-2} + \frac{\delta}{(X-2)^2}$.

On cherche à quelles conditions sur a, b, c, d les coefficients α et γ sont nuls. Calculons donc $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ en fonctions de a, b, c, d :

- $\beta = [(X-1)^2 R]_{X=1} = a + b + c + d$;
- $\delta = [(X-2)^2 R]_{X=2} = 8a + 4b + 2c + d$;
- En évaluant R pour $X = 0$, on obtient la relation $-\alpha + \beta - \frac{\gamma}{2} + \frac{\delta}{4} = \frac{d}{4}$;
- En considérant $\lim_{x \rightarrow +\infty} x R(x)$, on obtient $\alpha + \gamma = a$.

De toutes ces relations, on tire $\alpha = 5a + 4b + 3c + 2d$ et $\gamma = -(4a + 4b + 3c + 2d)$. La

condition recherchée est la nullité de ces deux coefficients, soit $\begin{cases} a = 0 \\ 4b + 3c + 2d = 0 \end{cases}$.

PROBLÈME 3 :

1. Si un tel polynôme L_i existe, il admet pour racines (distinctes) les n nombres a_j pour $j \neq i$, il est donc divisible par le produit $\prod_{j \neq i} (X - a_j)$. Comme $\deg(L_i) \leq n$, on a nécessairement

$L_i = \lambda_i \prod_{j \neq i} (X - a_j)$, où λ_i est une constante réelle. En écrivant enfin que $L_i(a_i) = 1$,

on obtient $\lambda_i = \frac{1}{\prod_{j \neq i} (a_i - a_j)}$. Le polynôme L_i , s'il existe, a donc nécessairement pour

expression $L_i = \prod_{j \neq i} \left(\frac{X - a_j}{a_i - a_j} \right)$, d'où l'unicité. On vérifie enfin que le polynôme L_i explicité ci-dessus est de degré n exactement et qu'il vérifie $L_i(a_j) = \delta_{ij}$ (symbole de Kronecker).

Conclusion : $L_i = \prod_{j \neq i} \left(\frac{X - a_j}{a_i - a_j} \right)$.

2. La famille $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ est constituée de $n+1$ vecteurs dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ de dimension $n+1$, il suffit donc de montrer qu'elle est libre. Soient $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ des réels

tels que $\sum_{i=0}^n \lambda_i L_i = 0$. Choisissons $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$; en évaluant cette égalité pour $X = a_j$, on a

$\sum_{i=0}^n \lambda_i L_i(a_j) = 0$, c'est-à-dire $\lambda_j = 0$, ce qu'il fallait démontrer.

3. Le polynôme $L = \sum_{j=0}^n b_j L_j$ répond à la question ; en effet, pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$L(a_i) = \sum_{j=0}^n b_j L_j(a_i) = \sum_{j=0}^n b_j \delta_{ij} = b_i ,$$

on a donc prouvé l'existence de L . Si deux polynômes L et M répondaient à la question, on aurait $L(a_i) = M(a_i)$ pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$: le polynôme $L - M$, de degré au plus n , aurait $n + 1$ racines, donc serait le polynôme nul, d'où l'unicité. Les coordonnées du polynôme L recherché dans la base $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ sont donc $(b_0, b_1, \dots, b_n)$.

4. On a

$$\begin{aligned} L_0 &= \frac{X(X-1)(X-2)}{(-1)(-1-1)(-1-2)} = -\frac{1}{6}X^3 + \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{3}X ; \\ L_1 &= \frac{(X+1)(X-1)(X-2)}{(0+1)(0-1)(0-2)} = \frac{1}{2}X^3 - X^2 - \frac{1}{2}X + 1 ; \\ L_2 &= \frac{(X+1)X(X-2)}{(1+1)1(1-2)} = -\frac{1}{2}X^3 + \frac{1}{2}X^2 + X ; \\ L_3 &= \frac{(X+1)X(X-1)}{(2+1)2(2-1)} = \frac{1}{6}X^3 - \frac{1}{6}X . \end{aligned}$$

D'après la question précédente, les coordonnées d'un polynôme P quelconque de $\mathbb{R}_3[X]$ dans la base (L_0, L_1, L_2, L_3) sont les valeurs de ce polynôme P aux points $-1, 0, 1$ et 2 respectivement, autrement dit

$$\forall P \in \mathbb{R}_3[X] \quad P = P(-1) L_0 + P(0) L_1 + P(1) L_2 + P(2) L_3 .$$

$$\text{En particulier, } \begin{cases} 1 &= L_0 + L_1 + L_2 + L_3 \\ X &= -L_0 \quad \quad + L_2 + 2L_3 \\ X^2 &= L_0 \quad \quad + L_2 + 4L_3 \\ X^3 &= -L_0 \quad \quad + L_2 + 8L_3 \end{cases} .$$

Remarque : les familles $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ et $\mathcal{L} = (L_0, L_1, L_2, L_3)$ sont deux bases de $E = \mathbb{R}_3[X]$. La matrice de passage $P_{\mathcal{B}, \mathcal{L}}$ de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{L}$, qui est aussi la matrice

$$M_{\mathcal{B}}(\mathcal{L}) \text{ de la famille de vecteurs } \mathcal{L} \text{ dans la base } \mathcal{B}, \text{ est } A = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 6 & -1 \\ 3 & -6 & -3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$\text{sa matrice inverse est la matrice de passage } P_{\mathcal{L}, \mathcal{B}} = M_{\mathcal{L}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} .$$

5.a. Si $x \in [0, 1]$, on a $\left|x - \frac{k}{n}\right| \leq 1$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$; alors $P_n(x)$ est un produit de facteurs tous inférieurs ou égaux à 1 en valeur absolue, donc $|P_n(x)| \leq 1$.

b. On procède par récurrence en utilisant le théorème de Rolle :

- pour $n = 0$, c'est le théorème de Rolle ;

• soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons l'assertion vraie au rang $n - 1$: si $\psi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$ admet $n + 1$ zéros, alors $\psi^{(n)}$ s'annule au moins une fois dans $]0, 1[$. Soit alors $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ admettant $n + 2$ zéros, φ s'annule donc en $n + 2$ points $b_0, b_1, \dots, b_{n+1}$ distincts de $[0, 1]$ que l'on peut supposer ordonnés ($0 \leq b_0 < b_1 < \dots < b_{n+1} \leq 1$). Par application du théorème de Rolle, la fonction dérivée $\psi = \varphi'$ (de classe $\mathcal{C}^n$) admet au moins $n + 1$ zéros (un dans chaque intervalle $]b_i, b_{i+1}[$ avec $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$). En appliquant l'hypothèse de récurrence à ψ , on voit qu'il existe au moins un $c \in]0, 1[$ tel que $\psi^{(n)}(c) = 0$, c'est-à-dire $\varphi^{(n+1)}(c) = 0$, ce qu'il fallait démontrer.

- c. On choisit $C = \frac{f(x) - L_n(x)}{P_n(x)}$ pour avoir $\varphi(x) = 0$: c'est possible car x n'est pas un zéro du polynôme P_n . La fonction φ , qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$, s'annule en au moins $n + 2$ dans l'intervalle $[0, 1]$ (les a_k pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, et x), donc il existe $c \in]0, 1[$ tel que $\varphi^{(n+1)}(c) = 0$. Or, pour tout $t \in [0, 1]$, on a $\varphi^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - C(n+1)!$, donc

$$f^{(n+1)}(c) = C(n+1)! = (n+1)! \frac{f(x) - L_n(x)}{P_n(x)}$$

et $f(x) - L_n(x) = \frac{P_n(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$ et, d'après la question **a.**, $|f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}$.

On a ainsi obtenu une majoration de l'erreur ponctuelle commise en remplaçant une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[0, 1]$ par son polynôme d'interpolation de Lagrange en les points $\frac{k}{n}$ ($0 \leq k \leq n$).