EXERCICE 1 :

On note I la matrice-unité d'ordre trois.

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ de la forme $M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$, avec $(a,b) \in \mathbb{C}^2$.

1. Calculer le produit $M(a,b)\,M(a',b')$.
Montrer que $\mathcal{E}$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.
Préciser la dimension et une base de l'espace vectoriel $\mathcal{E}$.

2. Les nombres complexes a et b étant donnés, écrire la matrice $M(a,b)^2$ comme combinaison linéaire de I et de $M(a,b)$.
En déduire une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que la matrice $M(a,b)$ soit inversible, et montrer que son inverse $M(a,b)^{-1}$ appartient alors à $\mathcal{E}$ et le calculer.

3. On pose ici $A = M(1,-1)$ et $J = M(1,1)$. Vérifier que $J^n = 3^{n-1}\,J$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
En déduire l'expression de A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 2 :

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A.

1. Montrer que $F = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{id})$ est un plan vectoriel dont on précisera une équation cartésienne ainsi que deux vecteurs de base (u,v). Montrer que $G = \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{id})$ est une droite vectorielle dont on précisera un vecteur directeur w.

2. Montrer que $\mathcal{B} = (u,v,w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

3. Donner la matrice $D = M_{\mathcal{B}}(f)$ de l'endomorphisme f relativement à la base $\mathcal{B}$.

4. Calculer D^n pour $n \in \mathbb{N}$; en déduire A^n.

PROBLÈME :

Une matrice A de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ est dite **tridiagonale symétrique** si elle est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_2 & a_3 & b_3 \\ 0 & 0 & b_3 & a_4 \end{pmatrix},$$

où a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3 sont des réels.

1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{T}$ des matrices tridiagonales symétriques est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, dont on précisera la dimension et une base (cette dernière étant exprimée à l'aide des matrices élémentaires E_{ij}).

2.a. Dans cette question, on choisit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. Déterminer la matrice L, de la forme

$L = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ e & b & 0 & 0 \\ 0 & f & c & 0 \\ 0 & 0 & g & d \end{pmatrix}$, à coefficients positifs, telle que $L\,{}^tL = A$.

b. En déduire que tout système linéaire d'écriture matricielle $AX = Z$ peut se ramener à la résolution successive de deux systèmes linéaires triangulaires dont on écrira la traduction matricielle (X et Z sont des matrices-colonnes à quatre lignes ; on introduira une matrice-colonne Y qui servira d'"inconnue intermédiaire").

c. Résoudre de cette façon le système

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & 2y & & & & & = & 5 \\ 2x & + & 5y & + & 2z & & & = & 6 \\ & & 2y & + & 5z & + & 2t & = & -9 \\ & & & & 2z & + & 5t & = & -1 \end{array}\right. .$$

3.a. Soit M une matrice quelconque de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, soit n un entier naturel non nul. Simplifier l'expression

$$(I - M)\,(I + M + M^2 + \cdots + M^{n-1})\ ,$$

où I représente la matrice-unité d'ordre 4.

b. Soit la matrice $S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \end{pmatrix}$, où a, b, c sont des réels. Calculer (en utilisant par exemple les matrices élémentaires) S^2, S^3 et S^4.

c. Déduire des questions **a.** et **b.** que la matrice $L = I - S$ est inversible et déterminer L^{-1}.

4. On reprend les matrices A et L de la question **2.a.**. Calculer L^{-1}, puis A^{-1}.

****

CORRIGÉ

****

EXERCICE 1 :

1. On vérifie que

$$M(a,b)M(a',b') = \begin{pmatrix} aa'+2bb' & ab'+ba'+bb' & ab'+ba'+bb' \\ ab'+ba'+bb' & aa'+2bb' & ab'+ba'+bb' \\ ab'+ba'+bb' & ab'+ba'+bb' & aa'+2bb' \end{pmatrix} = M(aa'+2bb', ab'+ba'+bb')\ .$$

Ce calcul prouve que l'ensemble $\mathcal{E}$ est stable par multiplication matricielle. Par ailleurs, en notant S la matrice $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = M(0,1)$, il est immédiat que $\mathcal{E}$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de I et de S, donc $\mathcal{E} = \mathrm{Vect}(I,S)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, de dimension 2 car (I,S) forme une base de $\mathcal{E}$. Enfin, $I \in \mathcal{E}$, donc $\mathcal{E}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, commutative car on observe que $M(a,b)\,M(a',b') = M(a',b')\,M(a,b)$.

2. On a $M(a,b)^2 = M(a^2 + 2b^2, 2ab + b^2)$ et on cherche à écrire cette matrice sous la forme $\lambda\,M(1,0) + \mu\,M(a,b)$, soit encore sous la forme $M(\lambda + \mu a, \mu b)$, ce qui exige que l'on ait $\begin{cases} \lambda \ + \ a\mu \ = \ a^2+2b^2 \\ \qquad b\mu \ = \ 2ab+b^2 \end{cases}$. Une solution de ce système (et la seule si $b \neq 0$) est $\begin{cases} \lambda \ = \ 2b^2-ab-a^2 \\ \mu \ = \ 2a+b \end{cases}$. Ainsi, $\qquad M(a,b)^2 = (2b^2-ab-a^2)\, I + (2a+b)\, M(a,b) \quad$ **(*)**.

Notons que l'on peut factoriser, en passant par une mise sous forme canonique :

$$2b^2-ab-a^2 = -(a^2+ab-2b^2) = -\Big(\big(a+\frac{b}{2}\big)^2-\frac{9}{4}b^2\Big) = -\Big(a+\frac{b}{2}-\frac{3b}{2}\Big)\Big(a+\frac{b}{2}+\frac{3b}{2}\Big) = (2b+a)(b-a)\ .$$

- Si $2b^2-ab-a^2 \neq 0$, l'identité **(*)** ci-dessus peut se réécrire

$$M(a,b)\ \Big(\frac{M(a,b)-(2a+b)I}{2b^2-ab-a^2}\Big) = I\ ,$$

  ce qui montre que la matrice $M(a,b)$ est inversible et que $M(a,b)^{-1} = \dfrac{M(a,b)-(2a+b)I}{2b^2-ab-a^2}$ appartient à $\mathcal{E}$.
- Si $2b^2-ab-a^2 = 0$, alors, en utilisant la factorisation ci-dessus, on voit que :

  - soit $a=b$ et la matrice est de la forme $\begin{pmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ a & a & a \end{pmatrix}$, évidemment non inversible car les trois colonnes sont identiques ;

  - soit $a=-2b$ et la matrice est de la forme $\begin{pmatrix} -2b & b & b \\ b & -2b & b \\ b & b & -2b \end{pmatrix}$, elle aussi non inversible (les trois colonnes sont liées puisque leur somme est nulle).

En résumé, une condition nécessaire et suffisante pour que $M(a,b)$ soit inversible est que $2b^2-ab-a^2 \neq 0$.

3. L'assertion $J^n = 3^{n-1}J$ est vraie pour $n=1$ (accessoirement aussi pour $n=2$) et, si elle est vraie pour un $n \in \mathbb{N}^*$ donné, alors $J^{n+1} = J^n\, J = 3^{n-1}J^2$; comme $J^2 = 3J$, cela donne $J^{n+1} = 3^n J$, ce qu'il fallait démontrer.

Écrivons $A = M(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 2I-J$. Comme les matrices $2I$ (matrice scalaire) et J commutent, on peut appliquer la formule du binôme de Newton (dans la formule du binôme, on mettra de côté le terme $k=0$ puisque la relation $J^k = 3^{k-1}\, J$ est valable pour $k \geq 1$ seulement) :

$$\begin{aligned} A^n &= (2I-J)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, (2I)^{n-k}\, (-J)^k \\ &= 2^n\, I + \sum_{k=1}^{n} C_n^k\, (-1)^k\, 2^{n-k}\, 3^{k-1}\, J \\ &= 2^n\, I + \frac{1}{3}\Big[\sum_{k=0}^{n} C_n^k\, (-3)^k\, 2^{n-k}\ -\ 2^n\Big]\, J \end{aligned}$$

$$= \quad 2^n\, I + \frac{(-1)^n - 2^n}{3}\, J \, .$$

Sous forme de tableau matriciel,

$$A^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} (-1)^n + 2^{n+1} & (-1)^n - 2^n & (-1)^n - 2^n \\ (-1)^n - 2^n & (-1)^n + 2^{n+1} & (-1)^n - 2^n \\ (-1)^n - 2^n & (-1)^n - 2^n & (-1)^n + 2^{n+1} \end{pmatrix} .$$

EXERCICE 2 :

1. L'endomorphisme $f+\mathrm{id}$ de $\mathbb{R}^3$ est représenté canoniquement par la matrice $A+I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Un vecteur $X = (x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ appartient à $\mathrm{Ker}(f+\mathrm{id})$ si et seulement si $(A+I)X = 0$, ce qui équivaut à l'équation $x+y+z = 0$, équation cartésienne d'un plan vectoriel F de $\mathbb{R}^3$, dont une base est par exemple constituée des deux vecteurs $u = (1, -1, 0)$ et $v = (1, 0, -1)$.

L'endomorphisme $f-2\,\mathrm{id}$ est représenté canoniquement par la matrice $A-2I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Un vecteur $X = (x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ appartient à $\mathrm{Ker}(f-2\,\mathrm{id})$ si et seulement si $(A-2I)X = 0$, ce qui équivaut au système $\begin{cases} -2\,x + y + z = 0 \\ x - 2\,y + z = 0 \end{cases}$ (la troisième équation $x+y-2z = 0$ n'apporte rien puisqu'elle est conséquence des deux premières, la somme des trois équations étant nulle). Ce système se résout en $x = y = z$, ce qui veut dire que $G = \mathrm{Ker}(f-2\,\mathrm{id})$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $w = (1, 1, 1)$.

2. Les sous-espaces F et G sont supplémentaires dans $E = \mathbb{R}^3$. En effet, la somme de leurs dimensions vaut 3, et leur intersection est réduite à $\{0\}$ (le seul vecteur pouvant vérifier simultanément $f(x) = -x$ et $f(x) = 2x$ est le vecteur nul). La famille (u, v, w), obtenue par concaténation d'une base de F et d'une base de G, est alors une base de $\mathbb{R}^3$. *Pour ceux que ces arguments ne convainquent pas, il est toujours possible de montrer "à la main" que la famille (u, v, w) est libre, donc que c'est une base puisqu'elle est constituée de trois vecteurs en dimension trois.*

3. De la question **1.**, on déduit $f(u) = -u$, $f(v) = -v$, $f(w) = 2w$, donc la matrice de l'endomorphisme f relativement à la base $\mathcal{B} = (u, v, w)$ est

$$D = M_{\mathcal{B}}(f) = \mathrm{diag}(-1, -1, 2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

4. On a $D^n = \mathrm{diag}\big((-1)^n, (-1)^n, 2^n\big) = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$. La matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}_0$ à la base $\mathcal{B}$ est $P = P_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, son inverse est $P^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}_0}$. Du cours sur les changements de bases, on déduit la relation $A = P\,D\,P^{-1}$. Par une récurrence immédiate, on obtient $A^n = P\,D^n\,P^{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il ne reste plus qu'à calculer :

$$A^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2\,(-1)^n + 2^n & (-1)^{n+1} + 2^n & (-1)^{n+1} + 2^n \\ (-1)^{n+1} + 2^n & 2\,(-1)^n + 2^n & (-1)^{n+1} + 2^n \\ (-1)^{n+1} + 2^n & (-1)^{n+1} + 2^n & 2\,(-1)^n + 2^n \end{pmatrix}.$$

PROBLÈME :

1. On a $A = a_1E_{11} + a_2E_{22} + a_3E_{33} + a_4E_{44} + b_1(E_{12} + E_{21}) + b_2(E_{23} + E_{32}) + b_3(E_{34} + E_{43})$. Donc l'ensemble $\mathcal{T}$ est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ engendré par la famille de matrices $(E_{11}, E_{22}, E_{33}, E_{44}, E_{12} + E_{21}, E_{23} + E_{32}, E_{34} + E_{43})$:

$$\mathcal{T} = \mathrm{Vect}(E_{11}, E_{22}, E_{33}, E_{44}, E_{12} + E_{21}, E_{23} + E_{32}, E_{34} + E_{43}).$$

Cette famille de matrices étant libre (écrire qu'une combinaison linéaire de cette famille est nulle revient à écrire que la matrice A de l'énoncé est la matrice nulle, ce qui entraîne que tous ses coefficients sont nuls), on a $\dim \mathcal{T} = 7$.

2.a. On a

$$L\,{}^tL = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ e & b & 0 & 0 \\ 0 & f & c & 0 \\ 0 & 0 & g & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & e & 0 & 0 \\ 0 & b & f & 0 \\ 0 & 0 & c & g \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & ae & 0 & 0 \\ ae & b^2+e^2 & bf & 0 \\ 0 & bf & c^2+f^2 & cg \\ 0 & 0 & cg & d^2+g^2 \end{pmatrix}.$$

L'équation $L\,{}^tL = A$ nous conduit au système

$$a^2 = 1\ ;\ ae = 2\ ;\ b^2 + e^2 = 5\ ;\ bf = 2\ ;\ c^2 + f^2 = 5\ ;\ cg = 2\ ;\ d^2 + g^2 = 5\ ,$$

dont la seule solution (en imposant que les coefficients inconnus a, b, c, d, e, f, g soient positifs) est $\{a = b = c = d = 1\ ,\ e = f = g = 2\}$, d'où $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

b. Si X et Z sont deux matrices-colonnes (appartenant à $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$), le système $AX = Z$ s'écrit $L\,{}^tLX = Z$. En posant $Y = {}^tLX$, on est ramené (Z étant donné) à chercher d'abord Y tel que $LY = Z$ (résolution d'un système "triangulaire inférieur"), puis ensuite à chercher X tel que ${}^tLX = Y$ (résolution d'un système "triangulaire supérieur").

c. Ici, $Z = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -9 \\ -1 \end{pmatrix}$. La résolution du système $LY = Z$ donne $Y = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, puis la résolution du système ${}^tLX = Y$ donne enfin $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3.a. Facile : $(I-M)\left(\sum_{k=0}^{n-1} M^k\right) = I - M^n$.

b. On a $S = a\,E_{21} + b\,E_{32} + c\,E_{43}$, d'où $S^2 = ab\,E_{31} + bc\,E_{42} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ ab & 0 & 0 & 0 \\ 0 & bc & 0 & 0 \end{pmatrix}$, puis

$S^3 = abc\,E_{41} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ abc & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et enfin $S^4 = 0$: la matrice S est nilpotente d'indice 4.

c. En appliquant la formule du **a.** avec $n = 4$, tenant compte de $S^4 = 0$, on obtient

$$(I-S)(I+S+S^2+S^3) = I\ ,$$

ce qui signifie que la matrice $L = I - S$ est inversible et que

$$L^{-1} = I + S + S^2 + S^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ ab & b & 1 & 0 \\ abc & bc & c & 1 \end{pmatrix} .$$

4. La matrice L de la question **2.a.** peut s'écrire $L = I - S$, avec $a = b = c = -2$, donc $L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ -8 & 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. De $A = L\ {}^tL$ avec L inversible, on déduit que A est inversible et

$$A^{-1} = (L\ {}^tL)^{-1} = ({}^tL)^{-1}\,L^{-1} = {}^t(L^{-1})\,L^{-1} = \begin{pmatrix} 85 & -42 & 20 & -8 \\ -42 & 21 & -10 & 4 \\ 20 & -10 & 5 & -2 \\ -8 & 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} .$$